4.3.1 等比数列的概念（1）

一、教材分析

本节课选自《2019 人教 A 版高中数学选择性必修二》第四章《数列》，本节课主要学习等比数列的概念

数列是高中代数的主要内容，它与数学课程的其它内容（函数、三角、不等式等）有着密切的联系，又是今后学习高等数学的基础，所以在高考中占有重要地位。

学生在已学习等差数列的基础上，引导学生类比学习等比数列，让学生经历定义的形成、通项公式的推导过程，体会数形结合的数学思想，体验从特殊到一般的研究方法，学会观察、归纳、反思，进一步培养学生灵活运用公式的能力。发展学生逻辑推理、直观想象、数学运算和数学建模的的核心素养。

二、学情分析

由于教师不仅是知识的传授者，而且也是学生学习的引导者、组织者和合作者。所以我采用“问题情景---建立模型---求解---解释---应用”的教学模式，启发引导学生通过对问题的亲身动手探求、体验，获得不仅是知识，更重要的是掌握了在今后的发展中用这种手段去获取更多的知识的方法。这是“教师教给学生寻找水的方法或给学生一杯水，使学生能找到一桶水乃至更多活水”的求知方式。多媒体可以使教学内容生动、形象、鲜明地得到展示。

三、教学目标

课程目标	学科素养
A. 理解等比数列及等比中项的概念. B．掌握等比数列的通项公式，能运用公式解决相关问题.	1.数学抽象：等比数列的定义 2.逻辑推理：等比数列通项公式的推导 3.数学运算：等比数列的运用 4.数学建模： 等比数列的函数特征

四、教学重难点

重点：等比数列及等比中项的概念

难点：等比数列的函数特征及综合运用

五、课前准备

（一）学习资源

（二）学习任务单

（三）教学方法及工具：以学生为主体，小组为单位，采用诱思探究式教学，精讲多练。多媒体。

六、教学过程

（一）新知探究

我们知道，等差数列的特征是“从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数” 。类比等差数列的研究思路和方法，从运算的角度出发，你觉得还有怎样的数列是值得研究的？

1.两河流域发掘的古巴比伦时期的泥版上记录了下面的数列:

$9, 9^2, 9^3, \dots, 9^{10}$; ①

$100, 100^2, 100^3, \dots, 100^{10}$; ②

$5,\ 5^2, 5^3, \dots, 5^{10}$. ③

2.《庄子·天下》中提到：“一尺之锤，日取其半，万世不竭.”如果把“一尺之锤”的长度看成单位“1”，那么从第 1 天开始，每天得到的“锤”的长度依次是

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$ ④

3.在营养和生存空间没有限制的情况下，某种细菌每 20 min 就通过分裂繁殖一代，那么一个这种细菌从第 1 次分裂开始，各次分裂产生的后代个数依次是

2,4,8,16,32,64,… ⑤

4.某人存入银行a元，存期为 5 年，年利率为 r ，那么按照复利，他 5 年内每年末得到的本利和分别是

$a(1+r), a(1+r)^2, a(1+r)^3, a(1+r)^4, a(1+r)^5$ ⑥

如果用 $\{a_n\}$ 表示数列①，那么有 $\frac{a_2}{a_1}=9, \frac{a_3}{a_2}=9, \dots \frac{a_{10}}{a_9}=9$

其余几个数列也有这样的取值规律吗？，请你试着写一写。

探究 1 类比等差数列的研究，你认为可以通过怎样的运算发现以上数列的取值规律？你发现了什么规律？

等差数列的概念

文字语言	如果一个数列从第__项起，每一项与它的______的差都等于__________，那么这个数列就叫做等差数列，这个____叫做等差数列的公差，公差通常用字母__表示
符号语言	$a_{n+1}-a_n=d$(d 为常数，$n\in\mathbf{N}^*$)

探究 2 类比等差数列的概念，从上述几个数列的规律中，你能抽象出等比数列的概念吗？

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数，那么这个数列叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比，公比通常用字母 q表示(显然$q\neq 0$).

符号语言： $\frac{a_n}{a_{n-1}}=q(n\geq 2, n\in N^*)$.

探究 3 在等差数列中，我们学习了等差中项的概念，通过类比，我们在等比数列中有什么相应的概念？如何定义？

探究 4　你能根据等比数列的定义推导它的通项公式吗？

设一个等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1,公差为d,根据等差数列的定义，可得$a_{n+1}-a_n= d$

所以$a_2-a_1= d$，$a_3-a_2= d$，$a_4-a_3= d$,…

于是　$a_2 = a_1+ d$,

$a_3 = a_2+ d$=$(a_1+ d) + d = a_1+ 2d$,

$a_4 = a_3+ d$=$(a_1+ 2d) + d = a_1+ 3d$,……

归纳可得$a_n = a_1$+$(\mathrm{n}-1)\ d$　$(\mathrm{n}\geq 2)$

当 n= 1时，上式为$a_1 = a_1$+$(1-1)\ d = a_1$，这就是说,上式当时也成立。

因此，首项为a_1,公差为d的等差数列$\{a_n\}$的通项公式为$\boldsymbol{a_n = a_1+(n-1)\ d}$

请你回忆一下，等差数列通项公式的推导过程，类比猜想，等比数列如何推导通项公式？

设一个等比数列$\{a_n\}$的为q,根据等比数列的定义，可得

$$a_{n+1} = a_n\cdot \mathrm{q}$$

所以$a_2 = a_1\ \mathrm{q}$,

$a_3 = a_2\ \mathrm{q}$=$(a_1\ \mathrm{q})\ q = a_1q^2$,

$a_4 = a_3q$=$(a_1q^2)\ q = a_1q^3$　　……

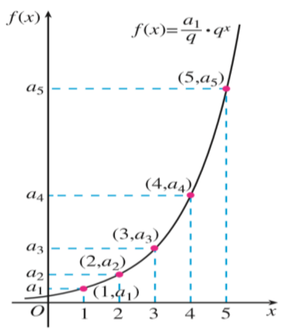
归纳可得$a_n = a_1q^{n-1}$$(\mathrm{n}\geq 2)$

又$a_1 = a_1q^0 = a_1q^{1-1}$，这就是说，当 n= 1时，上式也成立。

因此，首项为a_1,公比为q的等比数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$\boldsymbol{a_n = a_1q^{n-1}}$$

探究 5　在等差数列中,公差$d\neq 0$的等差数列可以与相应的一次函数建立联系,那么对于等比数列,公比 q 满足什么条件的数列可以与相应的函数建立类似的联系？



$$a_n = a_1q^{n-1} = \frac{a_1}{q}q^n$$

当$q > 0$ 且$q \neq 1$ 时，$f(x) = \frac{a_1}{q}q^x(x \in R)$

当$x = n$时，$f(n) = \frac{a_1}{q}q^n(n \in N^*)$

即指数型函数$f(x) = ka^x$

（为k，a常数， $k \neq 0$，$a > 0$且$a \neq 1$）构成一个等比数列$\{ka_n\}$，

$$f(1) = ka，f(2) = ka^2，\cdots，f(n) = ka^n，\cdots$$

其首项为ka，公比为a

探究 6 类比指数函数的性质，你能说说公比$q > 0$的等比数列的单调性吗？

$f(x) = \frac{a_1}{q}q^x(x \in R)$

	$0<q<1$	$q>1$	$q=1$
指数函数$y=q^x$的单调性	单调递减	单调递增	
等比数列$a_n=q^n$的单调性	单调递减	单调递增	不变
等比数列$a_n=a_1q^{n-1}$的单调性	$a_1>0$		
	单调递减	单调递增	不变
	$a_1<0$		
	单调递增	单调递减	不变

（二）典例解析

例 1. 若等比数列$\{a_n\}$的第 4 项和第 6 项分别为 48 和 12，求$\{a_n\}$的第 5 项.

解法 1：由$a_4 = 48$，$a_6 = 12$，得

$$\begin{cases} a_1q^3 = 48, & ① \\ a_1q^5 = 12. & ② \end{cases}$$

②的两边分别除以①的两边，得$q^2 = \frac{1}{4}$. 解得$q = \frac{1}{2}$或$-\frac{1}{2}$.

把$q = \frac{1}{2}$ 代入①，得$a_1 = 384$.

此时 $a_5 = a_1q^4 = 384 \times (\frac{1}{2})^4 = 24$.

把$q = -\frac{1}{2}$ 代入①，得$a_1 = -384$.

此时 $a_5 = a_1q^4 = 384 \times (-\frac{1}{2})^4 = -24$.

因此$\{a_n\}$的第 5 项是 24 或-24.

解法 2：因为 a_5 是 a_4 与 a_6 的等比中项，所以$a_5^2 = a_4a_6 = 48 \times 12 = 576$.

所以$a_5=\pm\sqrt{576}=\pm24$.

因此，$\{a_n\}$的第 5 项是 24 或-24.

例 2 已知等比数列$\{a_n\}$的公比为q，试用$\{a_n\}$的第m项a_m表示a_n.

解：由题意，得$a_m=a_1q^{m-1}$，①

$a_n=a_1q^{n-1}$.　　②

②的两边分别除以①的两边，得$\frac{a_n}{a_m}$=q^{n-m}

所以　$a_n=a_mq^{n-m}$.

跟踪训练 1 在等比数列$\{a_n\}$中，

(1)若 $a_2=4$，$a_5=-\dfrac{1}{2}$，求 a_n；

(2)若 $a_2+a_5=18$，$a_3+a_6=9$，$a_n=1$，求 n.

例 3. 数列$\{a_n\}$共有 5 项，前三项成等比数列，后三项成等差数列，第 3 项等于 80，第 2 项与第 4 项的和等于 136，第 1 项与第 5 项的和等于 132，求这个数列.

解：设前三项的公比为 q,后三项的公差为d，则数列的各项依次为$\frac{80}{q^2}$, $\frac{80}{q}$,80,80+d, 80+2d,

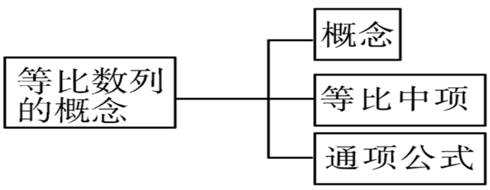
于是得$\begin{cases}\frac{80}{q}+(80+\mathrm{d})=136,\\ \frac{80}{q^2}+(80+2\mathrm{d})=132.\end{cases}$

解方程组，得$\begin{cases}q=2\\ d=16\end{cases}$ 或 $\begin{cases}q=\frac{2}{3}\\ d=-64\end{cases}$

所以这个数列是 20，40，80，96，112，或 180，120，80，16，-48.

跟踪训练 2.有四个数，其中前三个数成等差数列，后三个数成等比数列，并且第一个数与第四个数的和是 16，第二个数与第三个数的和是 12，求这四个数.

（三）**小结点评**



（四）作业布置

七、教学反思