

1.4.2 用空间向量研究距离、夹角问题(1)教学设计

一、教材分析

本节课选自《2019 人教 A 版高中数学选择性必修第一册》第一章《空间向量与立体几何》，本节课主要学习运用空间向量解决计算空间距离问题。

在向量坐标化的基础上，将空间中点到线、点到面、两条平行线及二平行平面角的距离问题，首先转化为向量语言，进而运用向量的坐标表示，从而实现运用空间向量解决空间距离问题，为学生学习立体几何提供了新的方法和新的观点，为培养学生思维提供了更广阔的空间。

二、学情分析

学生在“立体几何初步”的学习中，对于距离和夹角有了一定的认识，但缺乏整体性、系统性。在本章前面的学习中，也已经利用空间向量及其运算、空间向量基本定理等解决了一些简单的立体几何问题，但对于其中的向量方法体会还不够深刻，对于用空间向量解决立体几何问题的“三步曲”，也达不到熟练运用的程度，特别是在解决综合性问题时，常常对其中的第一步“建立立体图形与空间向量的联系，用空间向量表示问题中涉及的点、直线、平面，把立体几何问题转化为向量问题”缺乏经验和体会。

三、教学目标

- 1.能利用投影向量得到点到直线、点到平面的距离公式；
- 2.结合一些具体的距离问题的解决，归纳用空间向量解决立体几何问题的“三步曲”；
- 3.提升直观想象、数学运算等素养。

四、教学重难点

- 1.教学重点：利用投影向量得到点到直线、点到平面的距离公式。
- 2.教学难点：利用投影向量统一研究空间距离问题。

五、课前准备

(一) 学习资源

(二) 学习任务单

(三) 教学方法及工具：以学生为主体，小组为单位，采用诱思探究式教学，精讲多练。多媒体。

六、教学过程

(一) 学生反馈

前面，我们通过直线的方向向量、平面的法向量，运用向量的线性运算，数量积运算等研究了直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行和垂直的位置关系。下面我们继续用向量方法研究立体几何中的距离和角度等度量问题，进一步体会解决立体几何中有关问题的向量方法。

(二) 新课教授

1. 明确研究内容，聚焦基本问题

问题 1：立体几何中有哪些距离问题？

师生活动：通过教师提问，学生回答，确定立体几何中的各种距离问题。教师进一步指出，我们已经在学习空间向量的坐标运算时学习了两点间的距离，接下来进一步利用向量研究其他距离问题。

追问：你认为可以如何研究这些距离问题？

师生活动：教师进一步引导学生将上述距离问题归为两类，并由学生交流、讨论得出研究的路径，两点间的距离是根本，点到直线的距离和点到平面的距离是基础，其他距离问题都可以转化为这两类距离问题。

设计意图：明确研究内容和研究思路，将距离问题归类，引导学生研究其中最基本的问题。

2. 明晰要素，向量表示，探究点到直线的距离

问题 2：已知一条直线 l 和直线外一点 P ，求点 P 到直线 l 的距离。

追问 1：问题中有哪些几何要素？如何用向量来表示这些几何要素？

师生活动：教师引导学生用向量表示问题中点和直线两个几何要素。用直线上任意一点 A 和点 P 构成向量 \overrightarrow{AP} ，建立点 P 与直线的关联；直线由一个点和一个方向向量确定，可以取单位方向向量 u 表示直线 l 的方向向量。

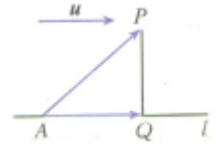
追问 2：作出点 P 到直线 l 的距离 PQ ，向量 \overrightarrow{AP} 与点 P 到直线 l 的距离 PQ 之间有什么关系？

师生活动：学生自主探究，得到向量 \overrightarrow{AP} 及其在直线 l 上的投影向量与 PQ 之间的关系，得到 $Rt\triangle APQ$ ，如图。

追问 3：你能借助图形，用向量方法求出点 P 到直线 l 的距离吗？

师生活动：教师先引导学生得出向量 \overrightarrow{AP} 在直线 l 上的投影向量 \overrightarrow{AQ} 的表达式，进而在 $Rt\triangle APQ$ 中，由勾股定理得到点到直线的距离公式

$$PQ = \sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 - |\overrightarrow{AQ}|^2} = \sqrt{(\overrightarrow{AP})^2 - (\overrightarrow{AP} \cdot u)^2}$$



设计意图：引导学生自主探究，利用向量表示问题中的几何元素，再利用投影向量以及勾股定理推导点到直线的距离公式。

问题 3：类比点到直线的距离的求法，如何求两条平行直线之间的距离？

师生活动：教师引导学生分析，问题中的条件是什么，如何利用条件实现问题的转化。通过讨论得出将两条平行直线之间的距离转化为点到直线的距离。

设计意图：让学生感悟转化思想，化未知为已知，为后续把直线与平面间的距离，两个平行平面间的距离转化为点到平面的距离，在思想方法上做铺垫。

3. 类比探究，推导点到平面的距离公式

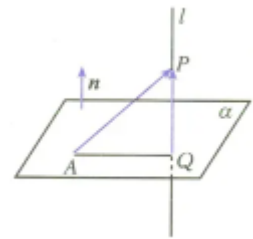
问题 4：类似于点到直线的距离，如何求平面 α 外一点 P 到平面 α 的距离？

追问 1：类似于直线可由一个点和方向向量确定，确定一个平面的条件是什么？

师生活动：由学生回答。

追问 2：你能类比求点到直线的距离的方法，利用投影向量求出点到平面的距离吗？

师生活动：学生独立思考，然后分组讨论交流；教师巡视、点拨；学生分享研究成果，师生共同评价，梳理成果，得出用空间向量求点到平面的距离的步骤(如图)：



(1)确定平面 α 的法向量 n ；

(2)选择“参考向量” \overrightarrow{AP} ；

(3)确定“参考向量” \overrightarrow{AP} 向法向量 n 的投影向量 \overrightarrow{QP} ；

(4)求投影向量 \overrightarrow{QP} 的模长，得到 $PQ = |\overrightarrow{AP} \cdot \frac{n}{|n|}| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot n|}{|n|}$ 。

设计意图：类比点到直线的距离的研究过程，合作探究，得到点到平面的距离公式，让学生进一步体会平面的法向量在刻画平面、求距离中的作用。在求解点到平面的距离的过程中，平面的法向量的方向和法向量上投影向量的长度既体现了图形直观，又提供了代数定量刻画。在这个过程中，向量与起点无关的自由性也为求距离到来了便利。

问题 5：如何求平行于平面的直线 l 到平面 α 的距离？两个平行平面之间的距离呢？

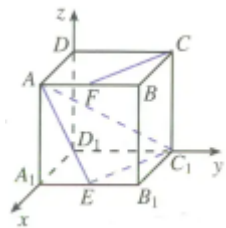
师生活动：通过学生回答，把问题转化为求平面外一点到平面的距离，由此得到求距离问题的统一公式。

设计意图：师生共析，将平行于平面的直线到平面的距离和两个平行平面间的距离转化为点到平面的距离，得到统一的向量表达式，进一步体会转化的思想。

(三) 典型例析

例 1：如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为线段 A_1B_1 的中点， F 为线段 AB 的中点，(1)求点 B 到直线 AC_1 的距离；(2)求直线 FC 到平面 AEC_1 的距离。

师生活动：教师引导学生分析问题的条件和所求，再根据问题条件建立适当的直角坐标系，用坐标表示相关的点、直线的方向向量、平面的法向量，再利用有关公式，经过坐标运算解决问题。本题的第一问师生共同分析完成，教师示范；第二小问学生完成，教师评价。



设计意图：通过典型例题，使学生巩固并逐步掌握利用向量方法求空间距离的方法，体会向量方法在

