7.5 正态分布

【学习目标】

1.通过误差模型，了解服从正态分布的随机变量；

2.通过具体实例，借助频率分布直方图的几何直观，了解正态分布的特点；

3.了解正态分布的均值、方差及其含义；

4.了解 3σ 原则,会求随机变量在特殊区间内的概率.

【学习重难点】

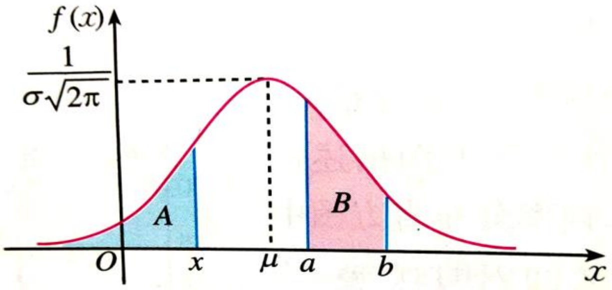
重点：认识分布曲线的特点及曲线所表示的意义.了解 3σ 原则.

难点：.会求随机变量在特殊区间内的概率.

【学习过程】

1.正态分布的定义

对任意的 $x\in R$,$f(x)>0$,它的图象在 x 轴的上方.可以证明 x 轴和曲线之间的区域的面积为 1.我们称 $f(x)$为正态密度函数,称它的图象为正态密度曲线,简称正态曲线,如上图所示.若随机变量 X 的概率分布密度函数为$f(x)$,则称随机变量X服从正态分布(normal dis-tribution),记为 $X\sim N(u,\sigma^2)$.特别地,当u=0,σ=1 时,称随机变量 X 服从标准正态分布. 即$X\sim N(0,1)$.



$$若随机变量X的概率分布密度函数为f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x\in R,$$

2.由 X 的密度函数及图像可以发现，正态曲线有以下特点：

（1）曲线在 x 轴的上方，与 x 轴不相交.

（2）曲线是单峰的,它关于直线 x=μ 对称.

（3）曲线在 x=μ 处达到峰值 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ (最高点)

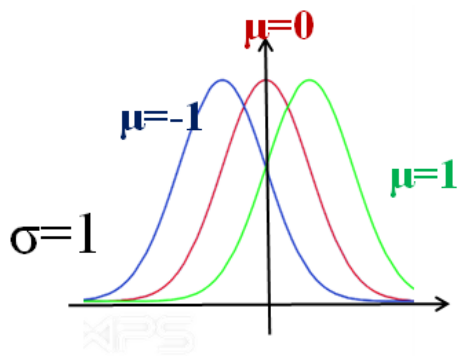
（4）当|X|无限增大时，曲线无限接近 x 轴.

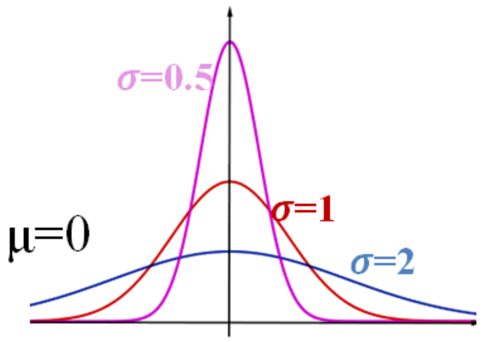
（5）X 轴与正态曲线所夹面积恒等于 1 .

3. **正态分布的期望和方差**

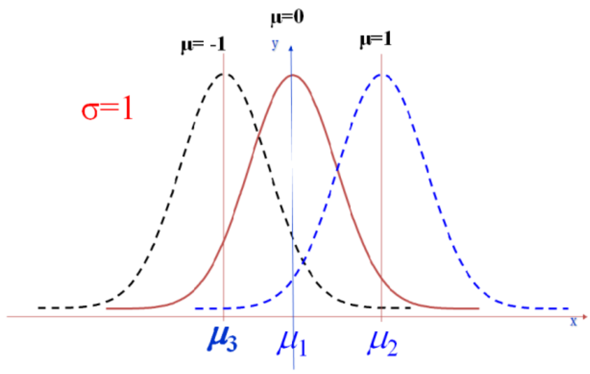
参数 μ 反映了正态分布的集中位置，σ 反映了随机变量的分布相对于均值 μ 的离散程度。

若$X \sim N(\mu, \ \sigma^2)$，则$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$.





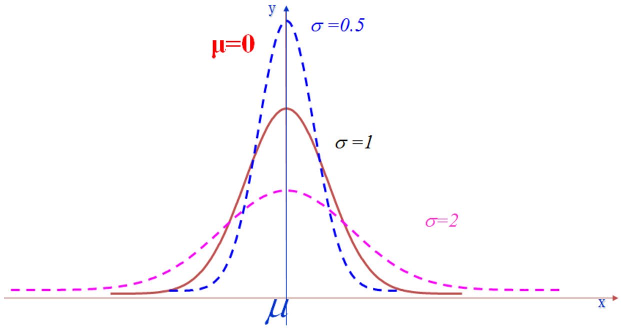
（1） 当 σ 一定时，曲线随着 μ 的变化而沿 x 轴平移；



(2)当 μ 一定时，曲线的形状由 σ 确定 .

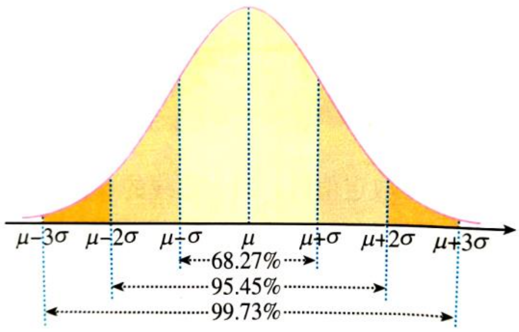
σ 越大，曲线越"矮胖"，表示总体的分布越分散；

σ 越小，曲线越"瘦高"，表示总体的分布越集中.



4. 正态分布的 3σ 原则

假设$X\sim N(\mu，\sigma^2)$，可以证明：对给定的$k\in N^*$，$P(\mu-k\sigma\leqslant X\leqslant\mu+k\sigma)$是一个只与k有关的值。



特别地，尽管正态变量的取值范围是$(-\infty,+\infty)$,但在一次试验中,X的取值几乎总落在区间$[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$内,而在此区间外取值的概率大约只有 0.0027,通常认为这种情况几乎不可能发生.

在实际应用中,通常认为服从于正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的随机变量X只取$[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$中的值,这在统计学中称为 3σ原则.

①$P(\mu-\sigma\leq X\leq\mu+\sigma)\approx0.6827$；②$P(\mu-2\sigma\leq X\leq\mu+2\sigma)\approx0.9545$；③$P(\mu-3\sigma\leq X\leq\mu+3\sigma)\approx0.9973$.

1、把一个正态曲线 a 沿着横轴方向向右移动 2 个单位，得到新的一条曲线 b。下列说法中不正确的是（　　　）

A.曲线 b 仍然是正态曲线;

B.曲线 a 和曲线 b 的最高点的纵坐标相等;

C.以曲线 b 为概率密度曲线的总体的期望比以曲线 a 为概率密度曲线的总体的期望大 2;

D.以曲线 b 为概率密度曲线的总体的方差比以曲线 a 为概率密度曲线的总体的方差大 2。