

# 4.1 数列的概念（1）

## 一、教材分析

本节课选自《2019 人教 A 版高中数学选择性必修二》第四章《数列》，本节课主要学习数列的概念与表示

“数列的概念与简单表示法”，主要涉及数列的概念、表示方法、分类、通项公式、数列和函数之间的关系等。数列是刻画离散现象的数学模型，是一种离散型函数，在日常生活中有着重要的应用。学习数列对深化函数的学习有着积极地意义，数列是以后学习极限的基础，因此，数列在高中数学中占有重要位置。数列的概念是学习数列的起点与基础，因而建立数列的概念是本章教学的重点，更是本节课教学的重点。学生主动自我建构概念，需要经历辨析、抽象、概括等过程，影响概念学习过程的因素又是多样的，所以，数列特征的感知和描述，函数意义的概括和理解，是教学的难点。

## 二、学情分析

学生学习了集合、函数的概念和性质等基本知识，初步掌握了函数的研究方法，在观察、抽象、概括等学习策略与学习能力方面，有了一定的基础。况且，数列概念的学习并不需要很多的知识基础，可以说学习数列的概念并无知识上的困难。这些都是数列概念教学的有利条件。刚开始高中数学学习的学生，自己主动地建构概念的意识还不够强，能力还不够高。同时，在建立概念的过程中，学生的辨别各种刺激模式、抽象出观察对象或事物的共同本质特征，概括形成概念，并且用数学语言（符号）表达等方面，会表现出不同的水平，从而会影响整体的教学。

## 三、教学目标

课程目标	学科素养
A.理解数列的有关概念与数列的表示方法. B.掌握数列的分类. C.理解数列的函数特征,掌握判断数列增减性的方法. D.掌握数列通项公式的概念及其应用,能够根据数列的前几项写出数列的一个通项公式.	1.数学抽象：数列的概念及表示、数列的分类 2.逻辑推理：求数列的通项公式 3.数学运算：运用数列通项公式求特定项 4.数学建模：数列的概念

## 四、教学重难点

重点：数列的有关概念与数列的表示方法

难点：数列的函数特征

## 五、课前准备

（一）学习资源

（二）学习任务单

（三）教学方法及工具：以学生为主体，小组为单位，采用诱思探究式教学，精讲多练。多媒体。

## 六、教学过程

## 一、情景导学

古语云：“勤学如春起之苗，不见其增，日有所长”如果对“春起之苗”每日用精密仪器度量，则每日的高度值按日期排在一起，可组成一个数列。那么什么叫数列呢？



## 二、问题探究

1. 王芳从一岁到 17 岁，每年生日那天测量身高，将这些身高数据（单位：厘米）依次排成一列数：

75,87,96,103,110,116,120,128,138,

145,153,158,160,162,163,165,168

①

记王芳第  $i$  岁的身高为  $h_i$ ，那么  $h_1=75$ ， $h_2=87$ ， $\dots$ ， $h_{17}=168$ 。我们发现  $h_i$  中的  $i$  反映了身高按岁数从 1 到 17 的顺序排列时的确定位置，即  $h_1=75$  是排在第 1 位的数， $h_2=87$  是排在第 2 位的数 $\dots$ ， $h_{17}=168$  是排在第 17 位的数，它们之间不能交换位置，所以①具有确定顺序的一列数。



2. 在两河流域发掘的一块泥板（编号 K90，约生产于公元前 7 世纪）上，有一列依次表示一个月中从第 1 天到第 15 天，每天月亮可见部分的数：

5,10,20,40,80,96,112,128,

144,160,176,192,208,224,240.

②

记第  $i$  天月亮可见部分的数为  $s_i$ ，那么  $s_1=5$ ， $s_2=10$ ， $\dots$ ， $s_{15}=240$ 。这里， $s_i$  中的  $i$  反映了月亮可见部分的数按日期从 1~15 顺序排列时的确定位置，即  $s_1=5$  是排在第 1 位的数， $s_2=10$  是排在第 2 位的数 $\dots$ ， $s_{15}=240$  是排在第 15 位的数，它们之间不能交换位置，所以，②也是具有确定顺序的一列数。



3.  $\frac{1}{2}$  的  $n$  次幂按 1 次幂，2 次幂，3 次幂，4 次幂 $\dots$ 依次排成一列数：

$-\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{4}$ ， $-\frac{1}{8}$ ， $\frac{1}{16}$  $\dots$

③

**思考:**你能仿照上面的叙述,说明③也是具有确定顺序的一列数吗?

## 一、数列

**1.定义:**一般地,我们把按照确定的顺序排列的一列数称为数列.

**2.项:**数列中的每一个数叫做这个数列的项.数列的第一个位置上的数叫做这个数列的第1项,常用符号  $a_1$  表示;第二个位置上的数叫做这个数列的第2项,用  $a_2$  表示.....第  $n$  个位置上的数叫做这个数列的第  $n$  项,用  $a_n$  表示.其中第1项也叫做首项.

**3.表示:**数列的一般形式是  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , 简记为  $\{a_n\}$ .

**点睛:** (1)数列是按一定的“顺序”排列的一列数,有序性是数列的基本属性.数相同而顺序不同的两个数列是不相同的数列,

例如  $1, 2, 3, \dots$  与  $3, 2, 1, \dots$  就是不同的数列.

(2)符号  $\{a_n\}$  和  $a_n$  是不同的概念,  $\{a_n\}$  表示一个数列,而  $a_n$  表示数列中的第  $n$  项.

## 二、数列的分类

	类别	含义
按项的个数	有穷数列	项数 <u>有限</u> 的数列
	无穷数列	项数 <u>无限</u> 的数列
按项的变化趋势	递增数列	从第2项起,每一项都 <u>大于</u> 它的前一项的数列
	递减数列	从第2项起,每一项都 <u>小于</u> 它的前一项的数列
	常数数列	各项 <u>相等</u> 的数列
	摆动数列	从第2项起,有些项 <u>大于</u> 它的前一项,有些项 <u>小于</u> 它的前一项的数列

## 三、数列与函数

数列  $\{a_n\}$  是从正整数集  $\mathbb{N}^*$  (或它的有限子集  $\{1, 2, \dots, n\}$ ) 到实数集  $\mathbb{R}$  的函数,

其自变量是序号  $n$ , 对应的函数值是数列的第  $n$  项  $a_n$ ,

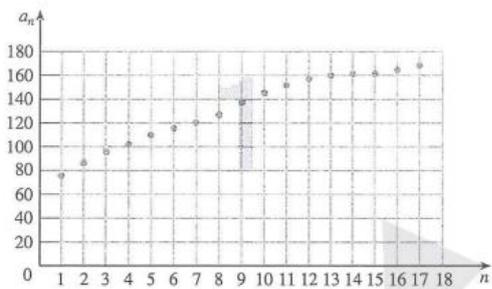
记为  $a_n = f(n)$ .

另一方面, 对于函数  $y = f(x)$ ,

如果  $f(n) (n \in \mathbb{N}^*)$  有意义,

那么 \_\_\_\_\_ 构成了一个数列  $\{f(n)\}$ .

$f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$



1. 下列叙述正确的是( )

- A. 所有数列可分为递增数列和递减数列两类
- B. 数列中的数由它的位置序号唯一确定
- C. 数列 1,3,5,7 可表示为{1,3,5,7}
- D. 同一个数在数列中不可能重复出现

答案:B

#### 四、数列的通项公式

如果数列{ $a_n$ }的第  $n$  项  $a_n$  与它的序号  $n$  之间的对应关系可以用一个式子来表示,那么这个式子叫做这个数列的通项公式.

点睛: (1)数列的通项公式实际上是一个以正整数集  $\mathbf{N}^*$  (或它的有限子集) $\{1,2,\dots,n\}$  为定义域的函数表达式.

(2)并不是所有的数列都有通项公式.

(3)同一数列的通项公式,其表达形式可以是不唯一的,例如数列

$-1,1,-1,1,-1,1,\dots$  的通项公式可以写成  $a_n = (-1)^n, a_n = (-1)^{n+2}, a_n = \cos n\pi$  等.

#### 三、典例解析

例 1. 根据下列数列{ $a_n$ }的通项公式, 写出数列的前 5 项,并画出它们的图像.

(1)  $a_n = \frac{n^2+n}{2}$ ;      (2)  $a_n = \cos \frac{(n-1)\pi}{2}$

解: (1) 当通项公式中的  $n=1, 2, 3, 4, 5$  时, 数列{ $a_n$ }的前 5 项依次为 1,3,6,10,15

如图所示(1)

(2) 当通项公式中的  $n=1, 2, 3, 4, 5$  时, 数列 { $a_n$ } 的前 5 项依次为 1,0,-1,0,1

如图所示(2)

例 2. 根据数列的前 4 项,写出下列数列的一个通项公式:

(1)  $\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}, 8, \frac{25}{2}, \dots;$

(2)  $1, -3, 5, -7, 9, \dots;$

(3)  $9, 99, 999, 9\ 999, \dots;$

(4)  $\frac{2^2-1}{1}, \frac{3^2-2}{3}, \frac{4^2-3}{5}, \frac{5^2-4}{7}, \dots;$

(5)  $-\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, -\frac{1}{3 \times 4}, \frac{1}{4 \times 5}, \dots$ ;

(6) 4, 0, 4, 0, 4, 0, ...

根据数列的前几项写通项公式的具体思路为:

(1) 先统一项的结构, 如都化成分数、根式等.

(2) 分析这一结构中变化的部分与不变的部分, 探索变化部分的规律与对应序号间的关系.

(3) 对于符号交替出现的情况, 可先观察其绝对值, 再用  $(-1)^k$  处理符号.

(4) 对于周期出现的数列, 考虑利用周期函数的知识解答.

## 2. 常见数列的通项公式

(1) 数列  $-1, 1, -1, 1, \dots$  的一个通项公式是  $a_n = (-1)^n$ , 数列  $1, -1, 1, -1, \dots$

的一个通项公式是  $a_n = (-1)^{n+1}$  或  $(-1)^{n-1}$ .

(2) 数列  $1, 2, 3, 4, \dots$  的一个通项公式是  $a_n = n$ .

(3) 数列  $1, 3, 5, 7, \dots$  的一个通项公式是  $a_n = 2n - 1$ .

(4) 数列  $2, 4, 6, 8, \dots$  的一个通项公式是  $a_n = 2n$ .

(5) 数列  $1, 2, 4, 8, \dots$  的一个通项公式是  $a_n = 2^{n-1}$ .

(6) 数列  $1, 4, 9, 16, \dots$  的一个通项公式是  $a_n = n^2$ .

(7) 数列  $1, 3, 6, 10, \dots$  的一个通项公式是  $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

(8) 数列  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  的一个通项公式是  $a_n = \frac{1}{n}$ .

跟踪训练 1. 写出下列数列的一个通项公式, 使它的前 4 项分别是下列各数:

(1)  $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ ; (2)  $2, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}, 6, \frac{1}{6}, 8, \frac{1}{8}$ ;

(3)  $3, 5, 9, 17$ ; (4)  $\frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{6}{35}, \frac{8}{63}$ ;

(5)  $7, 77, 777, 7777$ .

解: (1)  $a_n = \frac{1}{2n-1}$ ; (2)  $a_n = 2n + \frac{1}{2n}$ ; (3)  $a_n = 2^n + 1$ ;

(4)  $a_n = \frac{2n}{(2n)^2 - 1}$ ; (5)  $a_n = \frac{7}{9}(10^n - 1)$ .

例 3 (1) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n = n^2 - 5n - 6, n \in \mathbf{N}^*$ .

① 数列中有哪些项是负数?

② 当  $n$  为何值时,  $a_n$  取得最小值? 求出此最小值.

(2) 已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式  $a_n = (n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n (n \in \mathbf{N}^*)$ , 试问数列  $\{a_n\}$  有没有最大项? 若有, 求出最大项和

最大项的项数;若没有,请说明理由.

### 求数列的最大(小)项的两种方法

(1)由于数列是特殊的函数,所以可以用研究函数的思想方法来研究数列的相关性质,如单调性、最大值、最小值等,此时要注意数列的定义域为正整数集或其有限子集 $\{1,2,\dots,n\}$ 这一条件.

(2)可以利用不等式组 $\begin{cases} a_{n-1} \leq a_n, \\ a_n \geq a_{n+1} \end{cases} (n>1)$ 找到数列的最大项;

利用不等式组 $\begin{cases} a_{n-1} \geq a_n, \\ a_n \leq a_{n+1} \end{cases} (n>1)$ 找到数列的最小项.

## 四、小结点评

回顾本节课所学的知识,思考:

- (1) 什么是数列? 数列的表示法由哪些?
- (2) 我们研究数列的基本路径是什么? 类比哪个知识?
- (3) 数列表示法的核心是哪个?

## 五、作业布置

课本 P8 1, 3, 5

## 六、教学反思