



肥市第五中学

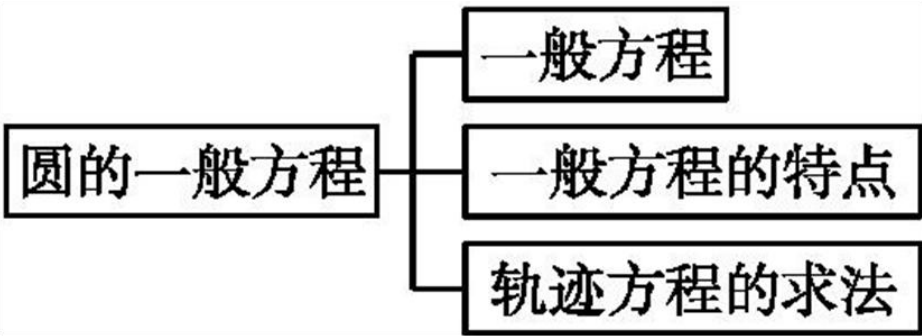
明理笃学

善行健美

2.4.2 圆的一般方程

王茹



核心素养	思维脉络
1.理解圆的一般方程及其特点.(数学抽象) 2.掌握圆的一般方程和标准方程的互化.(数学运算) 3.会求圆的一般方程以及与圆有关的简单的轨迹方程问题.(逻辑推理)	 <pre> graph LR A[圆的一般方程] --- B[一般方程] A --- C[一般方程的特点] A --- D[轨迹方程的求法] </pre>



复习

圆的标准方程: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

特征: 直接看出圆心与半径

指出下面圆的圆心和半径:

$$(x-1)^2+(y+2)^2=2$$

$$(x+2)^2+(y-2)^2=5$$

$$(x+a)^2+(y-2)^2=a^2 \quad (a \neq 0)$$

圆心	半径
$(1,-2)$	$\sqrt{2}$
$(-2,2)$	$\sqrt{5}$
$(-a,2)$	$ a $



动手

把圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 展开，得

$$x^2 + y^2 - \underline{2ax} - \underline{2by} + \underline{a^2 + b^2 - r^2} = 0$$

由于 a, b, r 均为常数

$$\text{令 } -2a = D, -2b = E, a^2 + b^2 - r^2 = F$$

结论： 任何一个圆方程可以写成下面形式

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$



思考

1.是不是任何一个形如 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 方程表示的曲线都是圆呢？

答案：形如 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的方程不一定是圆的方程.

2.下列方程表示什么图形？

(1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0;$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

(2) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0;$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$$

(3) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0.$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = -1$$



动动脑

把方程： $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

配方可得：

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

(1) 当 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 时,表示以 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ 为圆心, 以 $\left(\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}\right)$ 为半径的圆.

(2) 当 $D^2 + E^2 - 4F = 0$ 时,方程只有一组解 $x = -\frac{D}{2}$, $y = -\frac{E}{2}$, 表示一个点 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$.

(3) 当 $D^2 + E^2 - 4F < 0$ 时,方程无实数解,所以不表示任何图形.



探究新知

圆的一般方程:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (D^2 + E^2 - 4F > 0)$$

说明: ① x^2 与 y^2 系数相同并且不等于0;

②没有 xy 这样的二次项;

③圆心为 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$, 半径 $r = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

思考: 圆的标准方程与一般方程各有什么特点?

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (D^2 + E^2 - 4F > 0)$$

标准方程易于看出圆心与半径.

一般方程突出形式上的特点.



小试牛刀

1.判断下列方程能否表示圆的方程,若能写出圆心与半径

(1) $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 是 圆心 $(1, -2)$ 半径 3

(2) $2x^2+2y^2-12x+4y=0$ 是 圆心 $(3, -1)$ 半径 $\sqrt{10}$

(3) $x^2+2y^2-6x+4y-1=0$ 不是

(4) $x^2+y^2-12x+6y+50=0$ 不是

(5) $x^2+y^2-3xy+5x+2y=0$ 不是



小试牛刀

2. 已知圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的圆心坐标为 $(-2,3)$, 半径为 4, 则 D, E, F 分别等于 (D)

(A) $4, -6, 3$

(B) $-4, 6, 3$

(C) $-4, 6, -3$

(D) $4, -6, -3$

3. 若 $x^2+y^2-2ax-y+a=0$ 表示圆, 则 a 的取值范围是 (D)

(A) $a < \frac{1}{2}$ (B) $a > \frac{1}{2}$ (C) $a = \frac{1}{2}$ (D) $a \neq \frac{1}{2}$

典型例题

例1判断方程 $x^2+y^2-4mx+2my+20m-20=0$ 能否表示圆.若能表示圆,求出圆心和半径.

思路分析:可直接利用 $D^2+E^2-4F>0$ 是否成立来判断,也可把左端配方,看右端是否为大于零的常数.

解:(方法1)由方程 $x^2+y^2-4mx+2my+20m-20=0$ 可知 $D=-4m, E=2m, F=20m-20$,

$\therefore D^2+E^2-4F=16m^2+4m^2-80m+80=20(m-2)^2$. 因此,

当 $m=2$ 时,它表示一个点;

当 $m\neq 2$ 时,原方程表示圆,

此时,圆的圆心为 $(2m, -m)$,

半径为 $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=\sqrt{5}|m-2|$.

典型例题

例1判断方程 $x^2+y^2-4mx+2my+20m-20=0$ 能否表示圆.若能表示圆,求出圆心和半径.

思路分析:可直接利用 $D^2+E^2-4F>0$ 是否成立来判断,也可把左端配方,看右端是否为大于零的常数.

解:(方法2)原方程可化为 $(x-2m)^2+(y+m)^2=5(m-2)^2$,因此,

当 $m=2$ 时,它表示一个点;

当 $m\neq 2$ 时,原方程表示圆,

此时,圆的圆心为 $(2m, -m)$,

半径为 $r=\sqrt{5}|m-2|$.

小结1: 二元二次方程表示圆的判断方法

任何一个圆的方程都可化为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的形式,但形如 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的方程不一定表示圆.判断它是否表示圆可以有以下两种方法:

(1)计算 D^2+E^2-4F 的值,

若其值为正,则表示圆;

若其值为0,则表示一个点;

若其值为负,则不表示任何图形.

(2)将该方程配方为 $(x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$,根据圆的标准方程来判断.

典型例题

例2：求过三点A(5,1),B (7,-3),C(2,-8)的圆的方程

方法：待定系数法

解：设所求圆的方程为：

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 (D^2 + E^2 - 4F > 0)$$

因为A(5,1),B (7,-3),C(2,8)都在圆上

$$\begin{cases} 5^2 + 1^2 + 5D + E + F = 0 \\ 7^2 + (-1)^2 + 7D - E + F = 0 \\ 2^2 + 8^2 + 2D + 8E + F = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = -4 \\ E = 6 \\ F = 12 \end{cases}$$

所求圆的方程为

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$$

$$\text{即 } (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$

待定系数法

小结2:待定系数法步骤:

- (1)依题意设出待定系数方程;
- (2)列出关于待定系数的方程（组）;
- (3)解方程（组）得出系数，写出所求方程.

注意:求圆的方程时,要学会根据题目条件,恰当选择圆的方程形式:

- ①若知道或涉及圆心和半径,我们一般采用圆的标准方程较简单.
- ②若已知三点求圆的方程,我们常常采用圆的一般方程用待定系数法求解.

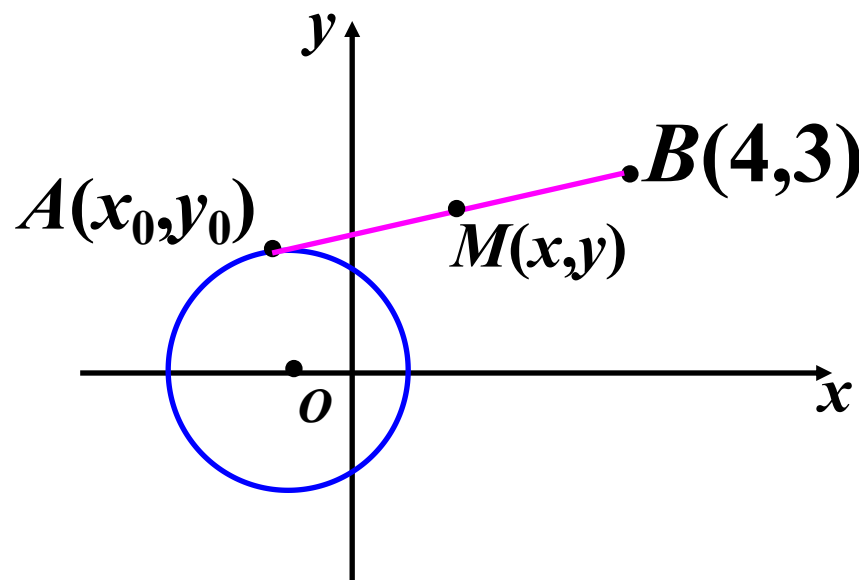
(特殊情况时,可借助图象求解更简单)

典型例题

例3. 已知线段 AB 的端点 B 的坐标是 $(4, 3)$ ，端点 A 在圆 $(x+1)^2+y^2=4$ 上运动，求线段 AB 的中点 M 的轨迹方程.

分析：点 A 的运动引起点 M 运动，而点 A 在已知圆上运动，点 A 的坐标满足圆的方程. 建立点 M 与点 A 坐标之间的关系，就可以建立点 M 的坐标满足的条件，从而求出点 M 的轨迹方程.

相关点法



$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 1$$

小结3: 相关点法步骤:

(1) 设被动点M (x, y) , 主动点Q (x_0, y_0) (I)

(2) 求出点M与点Q坐标间的关系 $\begin{cases} x = f_1(x_0, y_0) \\ y = f_2(x_0, y_0) \end{cases}$ (II)

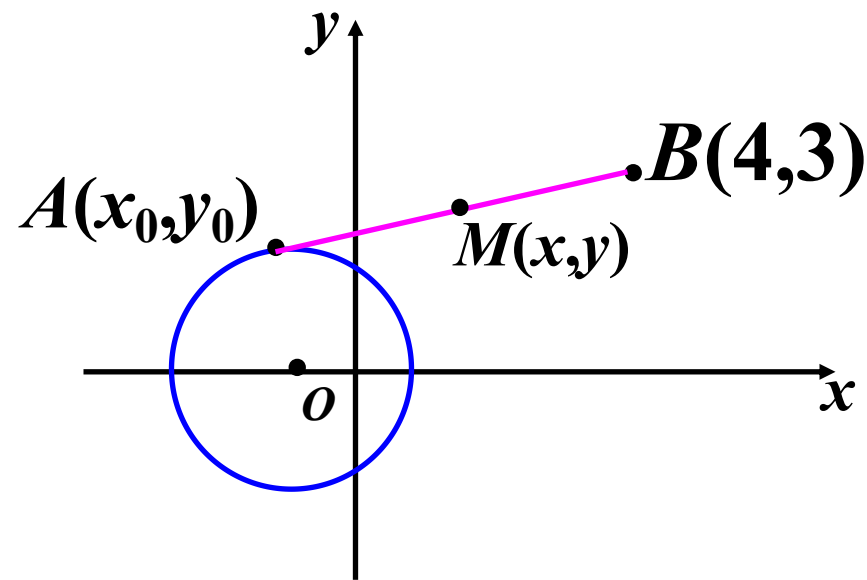
(3) 从(I)中解出 $\begin{cases} x_0 = g_1(x, y) \\ y_0 = g_2(x, y) \end{cases}$

(4) 将(II)代入主动点Q的轨迹方程(已知曲线的方程), 化简得被动点的轨迹方程。

变式：已知线段 AB 的端点 B 的坐标是 $(4, 3)$ ，端点 A 在圆 $(x+1)^2+y^2=4$ 上运动，求线段 AB 的中点 M 的轨迹。

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 1$$

所以点 M 的轨迹是以
 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 为圆心,半径长
是1的圆.



注意：“轨迹”与“轨迹方程”的区别.

思考： 已知 $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0, x, y \in \mathbb{R}$, 求

(1) $x^2 + y^2$ 的最值; (2) $\frac{y}{x}$ 的最值.

课堂小结

1.任何一个圆的方程可以写成 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (1) 的形式, 但方程 (1) 表示的不一定是圆, 只有 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 时, 方程表示圆心 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ 为半径为 $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

2.一般方程 $\xrightleftharpoons[\text{展开}]{\text{配方}}$ 标准方程

3.方程形式的选用:

①若知道或涉及圆心和半径, 采用圆的标准方程

②若已知三点求圆的方程, 采用圆的一般方程求解.

4.轨迹方程的求法: 待定系数法、相关点法